Razdioba particija cijelog broja po broju sumanada

Antun Rubčić i Jasna Baturić-Rubčić, Zagreb

Pozitivni cijeli broj n može se prikazati kao zbroj određenog broja manjih pozitivnih cijelih brojeva n_i

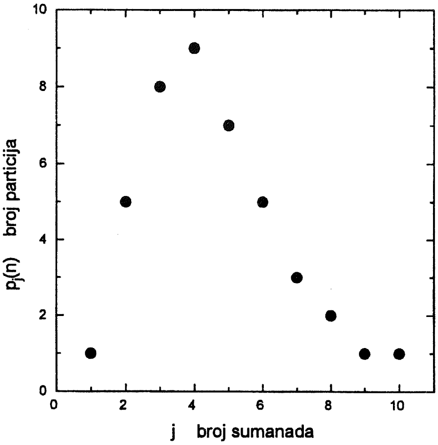
$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_i = \sum_{j=1}^{j\leqslant n} n_j. \tag{1}$$

$j=1$	10	$p_1(10)=1$
$j=2$	1+9, 2+8, 3+7, 4+6, 5+5	$p_2(10)=5$
$j=3$	1+1+8, 2+2+6, 3+3+4, 1+2+7, 2+3+5, 1+3+6, 2+4+4, 1+4+5	$p_3(10)=8$
$j=4$	1+1+1+7, 1+2+2+5, 1+3+3+3, 2+2+2+4, 1+1+2+6, 1+2+3+4, 2+2+3+3, 1+1+3+5, 1+1+4+4	$p_4(10)=9$
$j=5$	1+1+1+1+6, 1+1+2+2+4, 1+2+2+2+3, 2+2+2+2+2, 1+1+1+2+5, 1+1+2+3+3, 1+1+1+3+4	$p_5(10)=7$
$j=6$	1+1+1+1+1+5, 1+1+1+2+2+3, 1+1+2+2+2+2, 1+1+1+1+2+4, 1+1+1+1+3+3	$p_6(10)=5$
$j=7$	1+1+1+1+1+1+4, 1+1+1+1+2+2+2, 1+1+1+1+1+2+3	$p_7(10)=3$
$j=8$	1+1+1+1+1+1+1+3, 1+1+1+1+1+1+2+2	$p_8(10)=2$
$j=9$	1+1+1+1+1+1+1+1+2	$p_9(10)=1$
$j=10$	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	$p_{10}(10)=1$
	Ukupni broj particija je	$p(n)=\sum_{j=1}^{10} p_j(n)=42$

Tabela 1.

Za $j = 1$ cijeli broj je dan samo s jednim članom, tj. sa samim sobom, $j = 2$ određuje dva člana ili dva sumanda, $j = 3$ tri člana, i tako redom sve do $j = n$ kada je svaki od n sumanada jednak jedinici. Razlaganje broja n na manje pozitivne cijele brojeve prema (1), naziva se particija i označuje se s $p_j(n)$. Ilustrirajmo to na primjeru malog broja $n = 10$, u tabeli 1.

Prema tabeli 1 proizlazi da se broj particija u zavisnosti o broju sumanada podvrgava određenoj razdiobi. Rezultate prikažimo i grafički na sl. 1.



Slika 1.

Želimo odrediti koja od poznatih razdioba u statističkoj teoriji najbolje opisuje razdiobu particija po sumandima. Ovdje se radi o cijelim brojevima, a mi želimo ispitati neprekidne razdiobe u analitičkom obliku. Iz tabele 1 možemo također lako zaključiti da je

$$p_1(n) = 1 \tag{2}$$

$$p_2(n) = \frac{n}{2} \qquad n \text{ je parni broj} \tag{3}$$

$$p_2(n) = \frac{n-1}{2} \qquad n \text{ je neparni broj} \tag{4}$$

Na primjer $p_2(10) = 5$ kako je izneseno u tabeli 1, a $p_2(11) = 5$, jer je $11 = 1 + 10$, $2 + 9$, $3 + 8$, $4 + 7$, $5 + 6$. Izrazi (3) i (4) su bitni za prebrojavanje particija s više sumanada.

U tabeli 1 vidi se da je za $j = 3$ prvi niz particija s jedinicom na početku. Mijenjaju se samo drugi i treći broj. Kako je njihov zbroj neparan i jednak $n' = 9$ broj particija mora prema (4) biti $\frac{n'-1}{2} = \frac{9-1}{2} = \frac{(n-1)-1}{2}$. Sljedeći niz počinje s 2, a zbroj drugog i trećeg broja je paran i iznosi $n' = 8$, pa će zato broj particija biti prema (3) jednak $\frac{n'}{2} = \frac{n-2}{2} - 1 = 3$. Broj 1 se oduzima, jer u nizu nedostaje prva particija koja bi odgovarala broju 8 tj. $(1 + 7)$. Preostaje još treći niz koji počinje s 3. Zbroj druga dva broja je 7, pa je zato prema (4) broj particija $\frac{(n-3)-1}{2} - 2 = 1$. Broj -2 dolazi otuda što u nizu nedostaju prve dvije particije koje bi odgovarale broju 7, tj. $(1 + 6)$ i $(2 + 5)$. Jasno je da će za neki veći broj n broj nizova rasti koji imaju na početku broj

4, 5 i redom više. Općenito se za parni n broj particija s tri sumanda može napisati u obliku

$$p_3(n) = \left(\frac{(n-1)-1}{2}\right) + \left(\frac{n-2}{2} - 1\right) + \left(\frac{(n-3)-1}{2} - 2\right) + \left(\frac{n-4}{2} - 3\right) + \left(\frac{(n-5)-1}{2} - 4\right) + \dots$$

Ovaj niz možemo predstaviti s dvije sume. Prva sadrži neparne članove tj. prvi, treći, peti, itd. Druga suma sadrži parne članove tj. drugi, četvrti, šesti, itd.

Rezultat toga je

$$p_3(n) = \sum_{k=0,2,4,\dots} \left(\frac{n-(k+1)-1}{2} - k\right) + \sum_{k=1,3,5,\dots} \left(\frac{n-(k+1)}{2} - k\right). \tag{5}$$

Vrijednost od k raste sve dotle dok je izraz pod sumama pozitivan. Ako se u (5) izvrši prenumeracija indeksa u prvoj sumi $k = 2r - 2$, a u drugoj $k = 2s - 1$ slijedi

$$p_3(n) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r_m}(n + 4 - 6r) + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s_m}(n + 2 - 6s). \tag{6}$$

Maksimalne vrijednosti indeksa r i s su

$$r_m = \left\lfloor \frac{n+4}{6} \right\rfloor, \qquad s_m = \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor$$

gdje $\lfloor x \rfloor$ označuje najveći cijeli broj, koji nije veći od x. U slučaju $n = 10$ $r_m = \left\lfloor \frac{10+4}{6} \right\rfloor = \lfloor 2.66 \rfloor = 2$. U općem slučaju r_m i s_m nisu jednaki.

Ako se izvrši sumiranje aritmetičkih redova u (6), a čitalac neka to sam provjeri, izlazi

$$p_3(n_{parni}) = \frac{1}{2}[r_m(n + 1 - 3r_m) + s_m(n - 1 - 3s_m)]. \tag{7}$$

Analognim postupkom dobiva se izraz i za neparni n:

$$p_3(n_{neparni}) = \frac{1}{2}[r_m(n + 2 - 3r_m) + s_m(n - 2 - 3s_m)] \tag{8}$$

uz napomenu da je sada

$$r_m = \left\lfloor \frac{n+5}{6} \right\rfloor, \qquad s_m = \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor.$$

Jedno korisno svojstvo niza $p_3(n)$ je sljedeće. Ako se izračunaju prva dva člana niza ostali članovi se lako, bez računa, napišu prema pravilu koje ćemo utvrditi za $n = 20$ i $n = 19$, a onda primijeniti i na manji broj $n = 10$ u Tabeli 1.

Prva particija u nizu onih, koji prvi broj imaju 1, za $n = 20$ je $1 + 1 + 18$, a njih ima $\frac{20-1-1}{2} = 9$. Sljedeći niz particija, koje imaju prvi broj 2, a prva particija je $2 + 2 + 16$, sadrže ukupno $\frac{20-2}{2} - 1 = 8$ particija. Sljedeći niz, koji počinje s 3, a prva particija je $3 + 3 + 14$, daje 6 particija, itd. što vodi na red brojeva: 9, 8, 6, 5, 3, 2. Konačni broj particija je suma ovog reda tj. $p_3(20) = 33$. Za broj $n = 19$, postupak je sličan pa se dobiva red: 9, 7, 6, 4, 3, 1. Slijedi $p_3(19) = 30$. Sada lako uviđamo:

I. pravilo: Ako je drugi broj manji za jedan od prvoga, tada je treći broj manji za dva od drugoga, a četvrti manji od trećega za jedan, i slično dalje.

II. pravilo: Ako je drugi broj manji za dva od prvoga tada je treći broj manji za jedan od drugoga, a četvrti je manji za dva od trećega, i slično dalje.

Primjena na $n = 10$ daje za prvi i drugi član 4 i 3 pa slijedi da sljedeći (i zadnji član) mora biti 1. Za $n = 40$ prvi i drugi član je 19 i 18, pa je ukupni broj particija $p_3(40) = 19 + 18 + 16 + 15 + 13 + 12 + 10 + 9 + 7 + 6 + 4 + 3 + 1 = 133$.

Posvetimo još malo pažnje i particiji od četiri sumanda. Prema tabeli 1 uočavamo da postoje u osnovi dva niza particija: one, kojima je prvi broj 1 s oznakom $p_{4,1}(n)$ i one, kada je prvi broj 2 s oznakom $p_{4,2}(n)$. Za veće n pojavljuju se i nizovi, koji počinju s 3, 4, 5 itd. Na temelju razrade particija $p_3(n)$ možemo napisati i $p_4(n)$. Pregledno napisano

$$\begin{aligned}
p_4(n) &= p_{4,1}(n) + p_{4,2}(n) + p_{4,3}(n) + \dots \\
&= \left(\frac{n-2}{2}\right) + \left(\frac{n-3-1}{2} - 1\right) + \left(\frac{n-4}{2} - 2\right) + \left(\frac{n-5-1}{2} - 3\right) + \dots \\
&+ \left(\frac{n-4}{2} - 1\right) + \left(\frac{n-5-1}{2} - 2\right) + \left(\frac{n-6}{2} - 3\right) + \left(\frac{n-7-1}{2} - 4\right) + \dots \\
&+ \left(\frac{n-6}{2} - 2\right) + \left(\frac{n-7-1}{2} - 3\right) + \left(\frac{n-8}{2} - 4\right) + \left(\frac{n-9-1}{2} - 5\right) + \dots \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

Svaki od ovih nizova možemo prikazati pomoću dvije sume kako smo već prije učinili, pa izlazi

$$\begin{aligned}
p_4(n) = \frac{1}{2}\Big(&\sum_{k=0,2,4,\dots} (n-2-3k) + \sum_{k=1,3,5,\dots} (n-3-3k)\Big) \\
+ \frac{1}{2}\Big(&\sum_{k=1,3,5,\dots} (n-3-3k) + \sum_{k=2,4,6,\dots} (n-4-3k)\Big) \\
+ \frac{1}{2}\Big(&\sum_{k=2,4,6,\dots} (n-4-3k) + \sum_{k=3,5,7,\dots} (n-5-3k)\Big) + \dots
\end{aligned}$$

Odgovarajuća prenumeracija indeksa daje

$$\begin{aligned}
p_4(n) = \frac{1}{2}\Big(&\sum_{a=1,2,3,\dots} (n+4-6a) + \sum_{b=1,2,3,\dots} (n-0-6b)\Big) \\
+ \frac{1}{2}\Big(&\sum_{c=1,2,3,\dots} (n-0-6c) + \sum_{d=1,2,3,\dots} (n-4-6d)\Big) \\
+ \frac{1}{2}\Big(&\sum_{e=1,2,3,\dots} (n-4-6e) + \sum_{f=1,2,3,\dots} (n-8-6f)\Big) + \dots
\end{aligned}$$

Sasvim općenito se još može napisati za parni n

$$p_4(n_{parni}) = \frac{1}{2} \sum_{x=1,2,3,\dots} \Big(\sum_{u=1,2,3,\dots} (n+4-4(x-1)-6u) + \sum_{v=1,2,3,\dots} (n-4(x-1)-6v)\Big). \quad (9)$$

Prvo se uzima $x = 1$, i mijenjaju indeksi u i v sve dok su izrazi pod sumama pozitivni. Zatim se x poveća na dva i opet ponovi cijela procedura. Indeks x se mijenja sve dok su izrazi pod sumama pozitivni. Slično je i za neparni n.

Analogno bi bilo i za $p_5(n)$, samo su formule još opsežnije. Zato ćemo razmišljati na drugi način. Vratimo se još malo na $p_4(n)$. Prema tabeli 1 možemo sagraditi dvodimenzionalnu shemu brojeva particija na ovaj način:

prvi red su particije, koje počinju s 1: 4 2 1
drugi red su particije, koje počinju s 2: 2

Za $n = 20$ takva brojevna shema je

9 7 6 4 3 1
7 5 4 2 1
5 3 2
3 1
1

Zbroj svih brojeva u danoj shemi daje $p_4(20) = 64$.

Brojevnu shemu izgrađujemo prema sljedećem pravilu:

III. pravilo: prvi horizontalni red gradi se prema pavilima I. i II., ako se izračunaju samo prva dva broja. Drugi red nastaje tako da se brojevi u prvom redu smanje za dva. Treći red nastaje tako da se drugom redu brojevi smanje za dva i tako redom. Negativni brojevi nisu dozvoljeni.

Kod određivanja $p_5(n)$ koristimo rezultate dobivene za $p_4(n)$. Ovdje će se pojaviti onoliko shema koliko ima različitih početnih brojeva u particijama. Prema tabeli 1 za particije, koje počinju brojem 1 dana je prva shema:

3 2
1

i druga shema za particije, koje počinju s 2: 1.

Za $n = 20$ javljaju se 4 sheme:

8 7 5 4 2 1	6 4 3 1	3 2	1
6 5 3 2	4 2 1	1	
4 3 1	2		
2			

Čitalac neka sam provjeri broj particija $p_6(20)$. Treba poćeti s prvom particijom $\underline{1+1}+1+1+1+15$. Prvi niz počinje s $\dfrac{n-4}{2} = 8$. Drugi niz particija počinje s particijom $\underline{1+1}+1+2+2+13$ i sadrži $\dfrac{n-5-1}{2} - 1 = 6$ particija. Ta dva broja dovoljna su da se odrede sve particije, koje počinju s $\underline{1+1}$. Pripadna brojevna shema je

8 6 5 3 2.
6 4 3 1
4 2 1
2

Zatim se pobroje na sličan način sve particije koje počinju s 1+2: $\underline{1+2}+2+2+2+11$. Pripadna brojevna shema je

5 4 2 1
3 2
1

Početnoj particiji $1+3+3+3+3+7$ pripada shema:

$$\begin{array}{l} 3\ 1 \\ 1 \end{array}$$

Particiji $\underline{2+2}+2+2+2+10$ odgovara shema:

$$\begin{array}{l} 5\ 3\ 2 \\ 3\ 1 \\ 1 \end{array}$$

Dalje slijede particije, koje počinju s $\underline{2+3}$ i $\underline{3+3}$. Ukupni broj particija je 90.

Prebrojavanje particija je dugotrajan posao. No u današnje vrijeme elektroničkih računala moguće je odrediti broj particija za proizvoljno velike n.

Broj particija $p(n)$ raste brzo s n što je prikazano u tabeli 2 [1].

n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$
1	1	11	56	25	1958
2	2	12	77	30	5604
3	3	13	101	40	37338
4	5	14	135	50	204226
5	7	15	176	75	8118264
6	11	16	231	100	190569292
7	15	17	297	200	3972999029388
8	22	18	385		
9	30	19	490		
10	42	20	627		

Tabela 2.

Razmotrimo nadalje kakva je razdioba broja particija u zavisnosti o broju sumanada. Želimo naći samo jedno približenje sa ciljem da ispitamo koja je razdioba iz statističke teorije najpogodnija.

Jedna od najvažnijih razdioba je *normalna razdioba*. Funkcija gustoće normalno distribuirane slučajne varijable y prikazana je na sl. 2., a njen matematički izraz je

$$N(y) = \frac{A}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2} \tag{10}$$

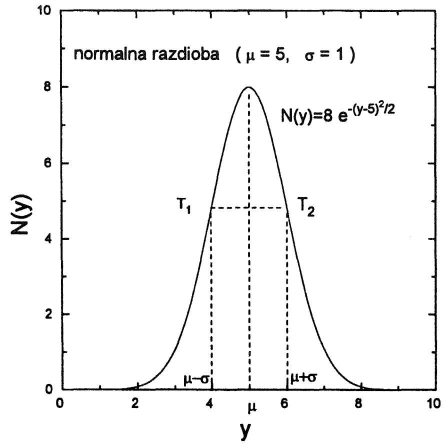
gdje je μ_y očekivanje, a σ_y^2 varijanca, koje su definirane na sl. 1. Točke T_1 i T_2 su točke infleksije s koordinatama $\mu-\sigma$ i $\mu+\sigma$.

Ako se za y pretpostavi

$$y = \ln(x) \tag{11}$$

što znači da se prirodni logaritam varijable x podvrgava normalnoj razdiobi, tada x ima logaritamsko-normalnu razdiobu [2] s funkcijom gustoće

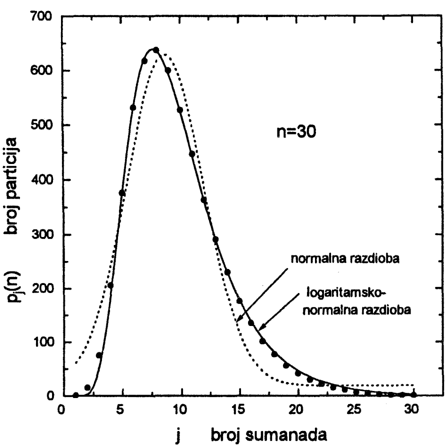
$$N(x) = \frac{A}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2}. \tag{12}$$



Slika 2.

U našim oznakama te ispuštanjem indeksa y, (12) prelazi u

$$p_j(n) \approx p_j(n)_{\text{rač}} = \frac{p(n)}{j\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln j - \mu)^2}. \tag{13}$$



Slika 3.

Primijenimo sada razdiobe (10) i (12) za broj $n = 30$. Podaci za j i $p_j(30)$ nalaze se u tabeli 3. Na sl. 3 točke predstavljaju ulazne podatke, a crtkana krivulja je najbolja prilagodba normalne razdiobe (10). Očito je da radi svoje simetričnosti normalna razdioba ne može dobro opisivati izrazitu nesimetričnu razdiobu particija cijelog broja. Naprotiv, logaritamsko-normalna razdioba pokazuje veoma dobro ponašanje, što je prikazano na sl. 3 s puno izvučenom krivuljom, a jednadžba te krivulje je $p_j(30)_{\text{rač}} = 5338.1e^{-2.8505(\ln j - 2.2113)^2}$. Parametri u (13) imaju sljedeće vrijednosti:

$\sigma = 0.4188 \pm 0.0021$, $\mu = 2.2113 \pm 0.0026$. Računske vrijednosti $p_j(30)_{\text{rač}}$ dane su također u tabeli 3, s tim da su dobivene vrijednosti zaokružene na najbliži cijeli broj.

Iz rezultata se vidi da logaritamsko-normalna razdioba dobro opisuje razdiobu particija cijelog broja, ali s teorijskog aspekta to ipak nije dovoljno. S povećanjem broja n smanjuje se odstupanje, uočeno u području od $n = 10$ do $n = 30$, i zato očekujemo da bi za velike n točnost bila sve veća.

j	$p_j(30)$	$p_j(30)_{\text{rač}}$	j	$p_j(30)$	$p_j(30)_{\text{rač}}$	j	$p_j(30)$	$p_j(30)_{\text{rač}}$
1	1	0	11	447	439	21	30	35
2	15	4	12	364	359	22	22	27
3	75	52	13	291	287	23	15	20
4	206	190	14	230	226	24	11	15
5	377	380	15	176	176	25	7	12
6	532	539	16	135	136	26	5	9
7	618	624	17	101	104	27	3	7
8	637	635	18	77	78	28	2	5
9	600	593	19	56	61	29	1	4
10	527	521	20	42	46	30	1	3

Tabela 3.

Interesantno je napomenuti da u tabeli 3 brojevi particija $p_j(30)$ od $j = 29$ pa sve do $j = 15$ imaju iste vrijednosti kao broj particija $p(n)$ od $n = 1$ do $n = 15$ u tabeli 1.

Mogući zadaci, koje bi čitalac mogao izvršiti, ako mu se ovi problemi dopadaju, su: provjeriti sve rečeno na nekom manjem broju, na primjer 25, ili 40, napisati program za $p_j(n)$, ispitati i druge poznate razdiobe kao što su Poissonova i Gama razdioba, potruditi se naći proizvoljnu razdiobu i odrediti značenje parametara (upotrijebiti funkciju $N(x) = Ax^b e^{-cx^d}$ i slično). Nužno je pritom koristiti izvore, kao na primjer one, koji su citirani u ovom radu.

Literatura

[1] G. E. ANDREWS, *The theory of partitions*, Addison-Wesley Publishing Comp. Reading, Massachusetts, 1976.

[2] I. PAVLIĆ, *Statistička teorija i primjena*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1988.

⋆⋆⋆

Potrebno je mnogo vremena da se nauči kako živjeti — i dok se uči vrijeme istekne! Proveo sam najveći dio života pokušavajući biti matematičarem — i što sam spoznao? Što je potrebno da se postane matematičar? Mislim da znam odgovor: treba biti rođen s talentom, treba neprekidno težiti savršenstvu, treba voljeti matematiku više od ičega, treba raditi naporno i bez prestanka i nadasve se ne smije nikada odustati!

Paul Richard Halmos (1916.), američki matematičar